LOS FRACTALES

Un fractal es una **figura**, que puede ser espacial o plana, formada por componentes **infinitos**. Su principal característica es que su apariencia y la manera en que se distribuye estadísticamente no varía aun cuando se modifique la escala empleada en la observación.

Los fractales son, por lo tanto, elementos calificados como **semi geométricos** (por su irregularidad no pertenecen a la **geometría** tradicional) que disponen de una estructura esencial que se reitera a distintas escalas.

El fractal puede ser creado por el hombre, incluso con intenciones artísticas, aunque también existen **estructuras** naturales que son fractales (como los copos de nieve).

De acuerdo a **Mandelbrot**, los fractales pueden presentar 3 clases diferentes de **autosimilitud**, lo que significa que las partes tienen la misma estructura que el **conjunto** total:

*** autosimilitud exacta**, el fractal resulta idéntico a cualquier escala;
*** cuasiautosimilitud**, con el cambio de **escala**, las copias del conjunto son muy semejantes, pero no idénticas;
*** autosimilitud estadística**, el fractal debe tener dimensiones estadísticas o de número que se conserven con la variación de la escala.

Las técnicas fractales se utilizan, por ejemplo, para **comprimir datos**. A través del **teorema del collage**, es posible encontrar un **IFS** (sistema de funciones iteradas), que incluye las alteraciones que experimenta una **figura** completa en cada uno de sus fragmentos autosemejantes. Al quedar la información codificada en el IFS, es posible procesar la imagen.

Hablamos de **música** fractal cuando un sonido se genera y se repite de acuerdo con patrones de comportamiento espontáneo que se encuentran con mucha frecuencia en la naturaleza. Cabe mencionar que existen programas informáticos capaces de crear composiciones de este tipo sin intervención del ser humano.

A menudo se cita el conjunto de Cantor en relación a los fractales, aunque no es correcto. Su definición, y que suele generar dicha confusión, es la siguiente: se toma un **segmento** y se lo parte en tres, para luego eliminar el central y repetir dicho accionar infinitamente con los restantes.

La geometría clásica no es lo suficientemente amplia como para abarcar los conceptos necesarios para medir las diferentes formas fractales. Si tenemos en cuenta que se tratan de **elementos cuyo tamaño cambia incesantemente** no es fácil, por ejemplo, calcular su longitud. La razón es que si se intenta realizar una **medición** de una línea fractal utilizando una unidad tradicional, existirán siempre componentes tan pequeños y delgados que no podrán ser delimitados con precisión.

En la curva de Koch, graficada a la derecha, se aprecia que desde su nacimiento crece a cada paso un tercio a lo largo; en otras palabras, la **longitud** de la porción que se ubica al principio se incrementa sin fin, determinando que cada curva sea 4/3 de la precedente.

Dado que la longitud de la línea fractal y la del instrumento de medición o la unidad de medida escogida están directamente relacionadas, resulta absurdo utilizar dicha noción. Es por eso que se ha creado el concepto de dimensión fractal que permite, cuando hablamos de líneas fractales, conocer de qué manera o en qué grado ocupan una porción de **plano**.

En relación con la geometría tradicional, un segmento posee **dimensión** uno, un círculo, dos, y una esfera, tres. Dado que una línea fractal no abarca toda la porción de plano, debería tener una dimensión que no llegue a dos.

La palabra “fractal” proviene del latín fractus, que significa “fragmentado”, “fracturado”, o simplemente “roto” o “quebrado”, muy apropiado para objetos cuya dimensión es fraccionaria. El término fue acuñado por Benoît Mandelbrot en 1977 aparecido en su libro The Fractal Geometry of Nature. Al estudio de los objetos fractales se le conoce, generalmente, como geometría fractal.

Un fractal es un conjunto matemático que puede gozar de autosimilitud a cualquier escala, su dimensión no es entera o si es entera no es un entero normal. El hecho que goce de autosimilitud significa que el objeto fractal no depende del observador para ser en sí, es decir, si tomamos algunos tipos de fractales podemos comprobar que al hacer un aumento doble el dibujo es exactamente igual al inicial, si hacemos un aumento 1000 comprobaremos la misma característica, así pues si hacemos un aumento n, el dibujo resulta igual luego las partes se parecen al todo.

Un conjunto u objeto es considerado fractal cuando su tamaño se hace arbitrariamente mayor a medida que la escala del instrumento de medida disminuye.

Hay muchos objetos ordinarios que, debido a su estructura o comportamiento, son considerados fractales naturales, aunque no los reconozcamos. Las nubes, las montañas, las costas, los árboles y los ríos son fractales naturales aunque finitos ergo no ideales; no así como los fractales matemáticos que gozan de infinidad y son ideales.

Algunas definiciones sencillas extraídas de ensayos y libros acerca del tema:

- Modelos infinitos comprimidos de alguna manera en un espacio finito
- Bellísimos y fascinantes diseños de estructura y complejidad infinita.

Resumen de las propiedades de los fractales:

- **Dimensión no entera.**
  Como se mostrará en el apartado siguiente la dimensión de un fractal no es un número entero sino un número generalmente irracional.
- **Compleja estructura a cualquier escala.**
  Los fractales muestran estructuras muy complejas independientemente de la escala a la cual lo observemos.
- **Infinitud.**
  Se consideran infinitos ya que a medida que aumentamos la precisión del instrumento de medición observamos que el fractal aumenta en longitud o perímetro.

- **Autosimilitud en algunos casos.**
  Existen fractales plenamente autosimilares de manera que el todo está formado por pequeños fragmentos parecidos al todo.

Normalmente un fractal se construye mediante una fórmula o función que se va iterando un número arbitrario de veces. Aunque otra forma de lograrlo es mediante la aplicación de técnicas de recursividad. Con estos dos métodos es como solemos conseguir la autosimilitud de los fractales, ya que aplicamos la misma función a diferentes niveles..
Tan importante es la elección de la formula como la elección del método de coloreado de los resultados. En relación a esto, existen multitud de técnicas de coloreado como pueden ser:

- Coloreado mediante el algoritmo de tiempo de escape.
- Coloreado por convergencia a soluciones de una ecuación.
- Cualquier otro que puedas imaginar.

Por nuestra parte, en esta simulación vamos a dedicar nuestra atención a fractales creados o descubiertos por el hombre mediante ecuaciones conocidas.
Concretamente mostraremos un especial interés en el **fractal de Newton** y en cómo se construye.

El fractal de Newton es una curiosa creación basado en la aplicación del método de Newton para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. El algoritmo es eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada.

La idea de este método es la siguiente: se comienza con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque), entonces se reemplaza la función que estamos tratando por la recta tangente en ese valor, se iguala a cero y se despeja (fácilmente, por ser una ecuación lineal). Este cero será, generalmente, una aproximación mejor a la raíz de la función. Luego, se aplican tantas iteraciones como se deseen hasta que el método de una solución adecuada. Cabe destacar que es posible que el método diverja en determinadas circunstancias que pueden depender de la elección del punto inicial.
Además es responsabilidad nuestra la elección de un buen test de parada, aunque dicho test podría basarse simplemente en el número de iteraciones realizadas (como es nuestro caso para los ejemplos).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Partiendo de este método, y dado que es capaz de aproximarse tanto a soluciones reales como a complejas, podríamos ingeniárnoslas para que dada una función se coloreasen de forma distinta las soluciones a las que el algoritmo va convergiendo. En pocas palabras: seleccionamos una región del plano complejo y vamos ejecutando el método de Newton, para una función F dada, en un punto elegido de la región.Dependiendo de a qué solución converga el método pintamos ese punto de un color u otro.

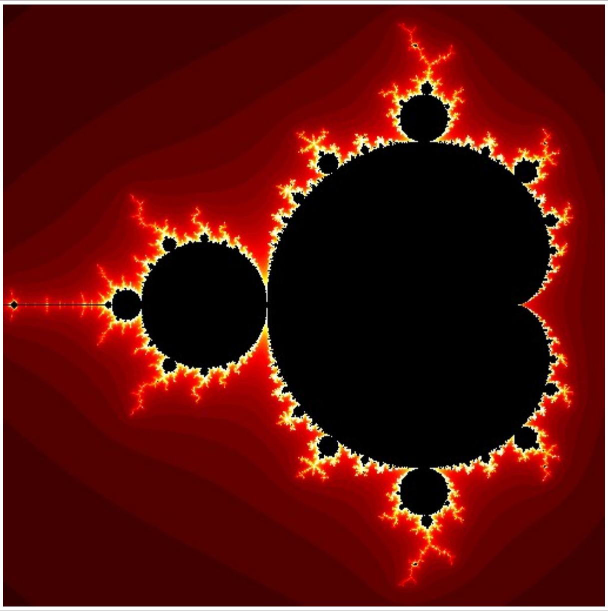
¡ Esta es la manera en la que se han pintado los fractales de Newton de las distintas simulaciones !

Como podemos comprobar, en este caso, han surgido fractales a partir de un método de aproximación de raíces de funciones y un poco de imaginación.

El conjunto de Mandelbrot es el más conocido de los conjuntos fractales, y el más estudiado.

Este conjunto se define así, en el plano complejo:
Sea c un número complejo cualquiera. A partir de c, se construye una sucesión por inducción:

- $z_0 = 0$ (término inicial)
- $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (relación de inducción)



Fractal de Mandelbrot

Los fractales son entidades matemáticas que están por todas partes. Y, precisamente, por su variedad, son difíciles de definir porque no todos cumplen las mismas características, aunque hay algo en común: son el producto de la repetición de un proceso geométrico elemental que da lugar a una estructura final de una complicación extraordinaria. Es decir, da como resultado un conjunto cuya frontera es imposible dibujar a pulso (por ser de longitud infinita). Hay muchos objetos de la naturaleza que, debido a su estructura o comportamiento, son considerados fractales naturales aunque no lo parezcan: las nubes, las montañas, las costas, los árboles y los ríos. En lo que se diferencian de los fractales matemáticos es que éstos son entidades infinitas.

La medición de formas fractales (fronteras, poligonales, etc,) ha obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, repetidos una y otra vez, el concepto de longitud no está claramente definido. Por más que queramos medir una linea fractal siempre habrá objetos más pequeños que escaparán a la sensibilidad de los instrumentos que utilicemos, por precisos que sean (y a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento aumenta la longitud de la línea). Así, como la longitud de la línea fractal depende de la longitud de instrumento con que la midamos, no nos sirve la noción tradicional de longitud. Para ello se ha ideado otro concepto: el de dimensión fractal.

La dimensión fraccionaria fractal mide el grado de escabrosidad y/o discontinuidad de un objeto presentando un grado de irregularidad constante a diferentes escalas. Al final resulta una irregularidad regular.

El grado de irregularidad de un objeto no es otra cosa que su eficacia para ocupar espacio y resulta que hay líneas que son más eficaces que otras al ocupar espacio, como la curva de Koch que tiene dimensión 1'2618, ya que es un objeto a caballo entre la línea y la superficie. En cierta medida llega a doblegar la dimensión y obtener más de ella, como lo hace la curva espacio-tiempo en la Teoría de la Relatividad.

Un fractal es la forma idónea de ver lo infinito con el ojo de la mente, ya que ésta no puede visualizar la infinita autoinclusión de la complejidad que reina en él.

Hay multitud de ejemplos de fractales: el copo de nieve de Koch, el triángulo de Sierpinski, la curva de Cesàro, la curva del Dragón, la de Hilbert, ... y todos ellos se nos antojan criaturas extrañas y ... bellas, muestran una complejidad regular y una autosemejanza interminable.

Con el artículo sobre la longitud de la costa de Bretaña, Mandelbrot volvió a encontrarse con la cualidad de la autosemejanza, como en la curva de Koch y el ruido de las líneas de teléfono.

Diariamente observamos multitud de objetos con un contorno liso que visto con ojos fractales se tornará tan escabroso como queramos. Siempre han estado entre nosotros: en los helechos, en nuestros pulmones, en las coles (sino lo crees mira una con una lupa de aumento), en la red bronquial, en los copos de nieve, en las cuencas hidrográficas, en las montañas, en el crecimiento de ciertos vegetales, ...

Autosimilitud

La medición depende de la escala escogida para realizar la observación y en los fractales esa escala significa autosimilitud. Autosimilitud tan perfecta que sería imposible distinguir una instantánea de un fractal a escala 1 que otra hecha a escala 200, simplemente por la autorrecurrencia que muestran los objetos fractales, por su simetría dentro de una escala, por su pauta en el interior de una pauta. Los objetos fractales están formados por copias más o menos exactas de partes de sí mismos.