TEORÍA DEL CAOS

La **teoría del caos** es la denominación popular de la rama de las matemáticas, la física y otras ciencias (biología, meteorología, economía, entre otras) que trata ciertos tipos de sistemas complejos y sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a largo plazo. Esto sucede aunque estos sistemas son en rigor deterministas, es decir; su comportamiento puede ser completamente determinado conociendo sus condiciones iniciales.

La teoría del caos también explica que el resultado de algo depende de distintas variables y que es imposible de predecir. Por ejemplo, si colocamos un huevo en la cúspide de una pirámide no sabremos hacia donde caerá.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar básicamente en:

- **Estables**, cuando dos soluciones con condiciones iniciales suficientemente cercanas siguen siendo cercanas a lo largo del tiempo. Así, un sistema estable tiende a lo largo del tiempo a un punto, u órbita, según su dimensión (atractor o sumidero).
- **Inestables**, cuando dos soluciones con condiciones iniciales diferentes acaban divergiendo por pequeñas que sean las condiciones iniciales. Así un sistema inestable "escapa" de los atractores.
- **Caóticos**, cuando el sistema no es inestable y si bien dos soluciones se mantienen a una distancia "finita" cercana a un atractor del sistema dinámico, las soluciones se mueven en torno al atractor de manera irregular y pasado el tiempo ambas soluciones no son cercanas, si bien suelen ser cualitativamente similares. De esa manera, el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo.

Una de las principales características tanto de los sistemas inestables como los caóticos es que tienen una gran dependencia de las condiciones iniciales (esto diferencia a ambos tipos de los sistemas estables). De un sistema del que se conocen sus ecuaciones de evolución temporal características, y con unas condiciones iniciales fijas, se puede conocer exactamente su evolución en el tiempo. Pero en el caso de los sistemas caóticos, una mínima diferencia en esas condiciones hace que el sistema evolucione de manera totalmente distinta. Ejemplos de tales sistemas incluyen el Sistema Solar, las placas tectónicas, los fluidos en régimen turbulento y los crecimientos de población.

El **caos determinista** comprende una serie de fenómenos encontrados en la teoría de sistemas dinámicos, la teoría de ecuaciones diferenciales y la mecánica clásica. En términos generales el **caos** determinista da lugar a trayectorias asociadas a la evolución temporal de forma muy irregular y aparentemente azarosa que sin embargo son totalmente deterministas, a diferencia del azar genuino. La irregularidad de las trayectorias está asociada a la imposibilidad práctica de predecir la evolución futura del sistema, aunque esta evolución sea totalmente determinista.

No hay una definición universal sobre el caos, pero hay tres ingredientes en los que todos los científicos están de acuerdo:

1. **Movimiento oscilante**. Las trayectorias no se ajustan a un punto fijo, órbita periódica u órbita cuasiperiódica cuando .
2. **Determinismo**. El sistema no es azaroso sino determinista. El comportamiento irregular surge de la no linealidad. Por eso se define como determinista.
3. **Sensibilidad a las condiciones**. Las trayectorias que comienzan cerca, con el tiempo se separan exponencialmente. Es decir, condiciones iniciales muy similares acaban dando lugar a comportamientos diferentes pasado un tiempo suficientemente largo.

Los sistemas caóticos típicamente se caracterizan por ser modelizables mediante un sistema dinámico que posee un atractor. Para definir propiamente un atractor hay que recurrir a tecnicismos, y es difícil dar una idea intuitiva sin ellos. En una primera aproximación puede decirse que un atractor es un conjunto en el que todas las trayectorias cercanas convergen. Los puntos fijos y círculos límite son un ejemplo de ello. Al igual que en la definición del caos, hay 3 ingredientes universales:

1. Cualquier trayectoria que esté en un atractor, estará en él para .
2. Atraen un conjunto de condiciones iniciales. El conjunto lo componen las condiciones iniciales de su trayectoria que acabe en el atractor cuando .
3. No existen condiciones iniciales que satisfagan las dos reglas anteriores.

Dentro de los atractores se define como atractor extraño o caótico cuando el atractor exhibe dependencia sensible con las condiciones iniciales.

Hay dos importantes tipos de sistemas dinámicos: las ecuaciones diferenciales y los sistemas iterativos de funciones. Las ecuaciones diferenciales describen la evolución de un sistema a tiempo real y los mapas iterados evolucionan en problemas donde el tiempo es discreto. Ambos son útiles para dar ejemplos del caos y también para analizar soluciones periódicas o caóticas de las ecuaciones diferenciales.

Se dice que un sistema es no lineal cuando la potencia de las variables de ese sistema es diferente a uno, hay productos entre diferentes variables o funciones de las variables.

> La mayoría de sistemas no lineales son analíticamente irresolubles. En estos casos se puede lograr alguna solución haciendo una aproximación, pero se pierden soluciones físicas. La razón de que las ecuaciones lineales sean más fáciles de analizar es que los sistemas lineales se pueden separar en partes, resolver cada una de ellas y juntar las soluciones para obtener la solución final. El hecho es que muchas cosas en la naturaleza actúan de forma no lineal.

La importancia que tienen los sistemas en el caos es el siguiente: se dice que un sistema dinámico es lineal cuando pequeños cambios en las condiciones iniciales del sistema no originan grandes cambios en el proceso y resultado final del mismo.

El comportamiento o movimiento en un sistema dinámico puede representarse sobre el espacio de fases. Los diagramas de fases no muestran una trayectoria bien definida, sino que ésta es errabunda alrededor de algún movimiento bien definido. Cuando esto sucede se dice que el sistema es atraído hacia un tipo de movimiento, es decir, que hay un atractor.

Al hablar de atractores no se hace referencia única y exclusivamente a los atractores caóticos, ya que antes de que apareciera el caos se conocían otros tipos de atractores. De acuerdo a la forma en que sus trayectorias evolucionen, los atractores pueden ser clasificados como:

- **Atractor de punto fijo**: Corresponde al más simple, el sistema que tenga un atractor de punto fijo tenderá a estabilizarse en un único punto. Un ejemplo común es el péndulo, que tiende al punto en el que el ángulo es nulo respecto a la vertical, debido al rozamiento con el aire.
- **Atractor de ciclo límite** o **atractor periódico**: Es el segundo tipo de atractor más sencillo. Este tipo de atractor tiende a mantenerse en un periodo igual para siempre. Como ejemplo, se puede tomar un péndulo alimentado para contrarrestar la fuerza de rozamiento, por lo que oscilaría de lado a lado.
- **Atractor caótico**: Aparece en sistemas no lineales que tienen una gran sensibilidad a las condiciones. Un famoso ejemplo de estos atractores es el atractor de Lorenz.

Estos nombres se relacionan exactamente con el tipo de movimiento que provocan en los sistemas. Un atractor periódico, por ejemplo, puede guiar el movimiento de un péndulo en oscilaciones periódicas; sin embargo, el péndulo seguirá trayectorias erráticas alrededor de estas oscilaciones debidas a otros factores menores no considerados.

En los mínimos de la energía potencial se observa que los puntos son estables mientras que el máximo corresponde a un punto de silla inestable. Las trayectorias de energía nula son órbitas homoclínicas que se hallan tanto en la variedad estable como en la inestable. Las demás trayectorias corresponden a oscilaciones periódicas cuyas órbitas encierran un solo punto estable ( ) o ambos ( ).

Si ahora se tiene en cuenta el rozamiento, se obtendrán oscilaciones amortiguadas, por lo que es lógico pensar que el sistema perderá energía monótonamente, mientras el tiempo transcurra. En consecuencia, las trayectorias tenderán a uno de los atractores de punto fijo.

Si ahora, además del rozamiento, se introduce una fuerza externa armónica que contrarresta a la fuerza de rozamiento, el sistema ya no tenderá al equilibrio. Al ser una fuerza armónica se encuentran soluciones periódicas (ciclos límite), pero nada que ver con los periodos de los que se habla cuando el sistema es conservativo ( ). En este caso los periodos son independientes de la energía por la fuerza de rozamiento y la armónica, así que los periodos dependen de la fuerza armónica externa.

Al aumentar la fuerza externa ( ), las órbitas periódicas desaparecen y oscilan sin cesar sin ninguna regularidad. Además de la irregularidad del sistema, este exhibe una gran sensibilidad a las condiciones iniciales por lo que nos encontramos ante un atractor extraño (o caótico).

En conclusión, para que haya caos se necesita que se cumplan los siguientes 3 puntos en un sistema:

1. El sistema debe ser no lineal.
2. El sistema debe tener mínimo 3 variables (puede ser por ejemplo de 2 variables y no autónomo).
3. El sistema debe tener dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Cuando el modelo matemático tenía era un sistema no lineal, pero al introducir se logra la tercera variable, el tiempo. Aunque no tenía dependencia a las condiciones iniciales. Por eso se ha de remarcar que el caos implica que el sistema sea de 3 o más variables, pero 3 o más variables no implican que haya caos.

Una manera de visualizar el movimiento caótico, o cualquier tipo de movimiento, es hacer un diagrama de fases del movimiento. En tal diagrama el tiempo está implícito y cada eje representa una dimensión del estado. Por ejemplo, un sistema en reposo será dibujado como un punto, y un sistema en movimiento periódico será dibujado como un círculo.

La mayoría de los tipos de movimientos mencionados en la teoría anterior suceden alrededor de atractores muy simples, tales como puntos y curvas circulares llamadas *ciclos límite*. En cambio, el movimiento caótico está ligado a lo que se conoce como atractores extraños, que pueden llegar a tener una enorme complejidad como, por ejemplo, el modelo tridimensional del sistema climático de Lorenz, que lleva al famoso atractor de Lorenz. El atractor de Lorenz es, quizá, uno de los diagramas de sistemas caóticos más conocidos, no sólo porque fue uno de los primeros, sino también porque es uno de los más complejos y peculiares, pues desenvuelve una forma particular, parecida a las alas de una mariposa.

Los atractores extraños están presentes tanto en los sistemas continuos dinámicos (tales como el sistema de Lorenz) como en algunos sistemas discretos (por ejemplo, la aplicación de Hénon). Otros sistemas dinámicos discretos tienen una estructura repelente, de tipo conjunto de Julia, la cual se forma en el límite entre las cuencas de dos puntos de atracción fijos. Julia puede ser sin embargo un atractor extraño. Ambos, atractores extraños y atractores tipo conjunto de Julia, tienen típicamente una estructura de fractal.

El teorema de Poincaré-Bendixson muestra que un atractor extraño sólo puede presentarse como un sistema continuo dinámico si tiene tres o más dimensiones. Sin embargo, tal restricción no se aplica a los sistemas discretos, los cuales pueden exhibir atractores extraños en dos o incluso una dimensión.

Los atractores extraños son curvas del espacio de fases que describen la trayectoria elíptica de un sistema en movimiento caótico. Un sistema con estas características es impredecible, conocer su configuración en un momento dado no permite predecirla con certeza en un momento posterior. De todos modos, el movimiento no es absolutamente aleatorio.

En la mayoría de sistemas dinámicos se encuentran elementos que permiten un tipo de movimiento repetitivo y, a veces, geométricamente establecido. Los atractores son los encargados de que las variables que inician en un punto de partida mantengan una trayectoria establecida, y lo que no se puede establecer de una manera precisa son las oscilaciones que las variables puedan tener al recorrer las órbitas que lleguen a establecer los atractores. Por ejemplo, es posible ver y de cierta manera prever la trayectoria de un satélite alrededor de la Tierra; lo que aparece, en este caso, como algo indeterminado son los movimientos e inconvenientes varios que se le pueden presentar al objeto para efectuar este recorrido.

En los atractores extraños se observan órbitas irregulares, que las trayectorias divergen exponencialmente y que permanecen en un espacio de fases acotado. Para explicar estas propiedades se usará la transformación del panadero que consiste en un doble proceso de estirar y plegar.

Este doble proceso de estirar (para separar exponencialmente las trayectorias) y plegar (para que la región del espacio de fases se mantenga acotado) es un mecanismo fundamental del caos determinista. A este proceso se le denomina **transformación del panadero**, porque el proceso de homogeneizar la masa consiste también en estirar (para homogeneizar) y plegar (para tener unas dimensiones manejables) la masa repetidas veces.

Al repetir infinitas veces el proceso, se logran infinitas capas que le dan al atractor una estructura fractal. Un ejemplo de esto se puede apreciar en el atractor de Rössler. Viendo el gráfico se observa cómo en el número 1 se estira y en el 3 se pliega. Cogiendo el 3 y volviendo a aplicar el proceso, se obtiene el doble de capas.

Otro ejemplo para explicar la trasformación es la ecuación de Duffing. En este caso como el espacio de fases es tridimensional. Pero al aparecer en un coseno, una dimensión es cíclica, por lo que para visualizar el atractor se considera una sección estroboscópica para valores , (.

En el siguiente dibujo hay 16 secciones por lo que , ( )

El caos y los fractales son parte de un tema mas amplio, la dinámica, rama de la física que empezó a mediados de 1600 cuando Isaac Newton descubrió las ecuaciones diferenciales, las leyes de movimiento y la gravitación general. Con estos elementos Newton resolvió problemas de dos cuerpos que interactúan por medio de la gravedad pero, lo que de verdad le llamaba la atención era el movimiento de la Luna y su generalización conocida con el nombre de problema de los tres cuerpos. Las siguientes generaciones de matemáticos y físicos trataron problemas de tres cuerpos y notaron que resultaban mucho más difíciles que los problemas de dos cuerpos, hasta el punto de darlos como imposibles.

En 1776 el matemático francés Pierre Simon de Laplace comenzó a publicar los 5 volúmenes del *Traité de Mécanique Céleste*, donde el autor afirmaba categóricamente que, si se conociera la velocidad y la posición de todas las partículas del Universo en un instante, se podría predecir su pasado y su futuro. Por más de 100 años su afirmación pareció correcta y, por ello, se llegó a la conclusión de que el libre albedrío no tenía espacio en mecánica clásica, ya que todo estaba determinado por el estado del Universo en un tiempo anterior.

El determinismo laplaciano consistía en afirmar que, si se conocen las leyes que gobiernan los fenómenos estudiados (y estas son deterministas como en mecánica clásica), se conocen las condiciones iniciales y se es capaz de calcular la solución, entonces se puede predecir con total certeza el futuro del sistema estudiado.